Краткие сообщения ОИЯИ № 1[47]-91 *JINR Rapid Communications No.1[47]-91*
УДК 539.14.5

ЯДЕРНАЯ СЖИМАЕМОСТЬ В МОДЕЛИ СОЛИТОНОВ КИРАЛЬНОГО ПОЛЯ

Р.М.Николаева, В.А.Николаев, О.Г.Ткачев[1]

Исследуется сжимаемость ядерно - подобных SU(2) - скирмионов с топологическим зарядом $B \leq 12$. Показано, что эта величина для скирмионной материи порядка нуклонной сжимаемости. Вычислены частоты жесткой дыхательной моды.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Nuclear Incompressibility in the Chiral Field Soliton Model

R.M.Nikolaeva, V.A.Nikolaev, O.G.Tkachev

The incompressibility of the nuclei - like SU(2) - skyrmions with topological charge $B \leq 12$ has been calculated. This value has been shown to be about that for nucleon. The frequences of the hard breathing mode have also been calculated.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

1. Введение

Особый интерес среди различных коллективных ядерных возбуждений вызывают возбуждения монопольной, или "дыхательной" моды. Они интересны в связи с открытием гигантских резонансов коллективного типа в неупругом рассеянии электронов и адронов на ядрах. Можно отметить также, что такие возбуждения, вероятно, существенно влияют на однонуклонную структурную функцию ядер, которая определяет ЕМС-эффект [1].

[1]ДВГУ, Владивосток

Принято считать, что дыхательная мода соответствует осцилляциям плотности ядерной материи и характеризует ее сжимаемость. В [2] такая интерпретация предложена и для Репер-резонанса. В такой версии радиус нуклонного мешка считается динамической переменной, а энергия Репер - резонанса соответствует первому возбужденному состоянию квантового радиального движения поверхности. Энергия мешка как функция его радиуса R играет роль потенциальной энергии движения "вдоль" коллективной переменной R. В такой модели несколько большую трудность представляет определение оператора кинетической энергии в соответствующем уравнении Шредингера. Естественно предположить, что этот оператор пропорционален второй производной по радиусу R, действующей на волновую функцию. Последняя определяет амплитуду флуктуаций размера системы. Подобное уравнение может быть получено в приближении Хилла - Уийлера - Гриффина [3], а также вводилось Дираком [4] в теории электрона. Общей трудностью этих подходов является расчет эффективной массы, входящей в оператор кинетической энергии. Обычно эффективная масса — феноменологический параметр модели, который оценивается из эвристических соображений.

Недавно была предложена [5] интерпретация Репер-резонанса как возбуждения дыхательной моды солитонов кирального поля в модели Скирма. Замечательным свойством этой модели является единство описания нуклонов и ядер как топологически нетривиальных солитонов. Динамическими переменными, в терминах которых описываются нуклоны и ядра, являются бозонные поля, удовлетворяющие уравнениям Эйлера - Лагранжа, соответствующим кирально - инвариантному лагранжиану. Топологически - нетривиальные конфигурации этих полей интерпретируются как барионы. Конфигурации, топологически эквивалентные вакууму, соответствуют мезонам.

Эти рассуждения приводят к идее, что нуклонная дыхательная мода переходит в ядерную дыхательную моду. Прояснению этой задачи и посвящена данная работа.

В первой части мы приводим наивные соображения в пользу сформулированной идеи. Во второй части даны уравнения модели киральных солитонов, необходимые для расчета частот дыхательной моды в легких ядрах.

2. Наивное рассмотрение

Здесь мы формулируем нашу цель в более ясной форме, используя упрощенное рассмотрение дыхательной моды куска ядерной материи. Вообще говоря, нет единого определения несжимаемости K конечной системы с массовым числом A.

Несжимаемость может быть определена, например, как вторая производная от энергии, приходящейся на одну частицу, по радиусу R в точке равновесия R_0:

$$K_A = R_0^2 \frac{\partial^2(E/A)}{\partial R^2}\bigg|_{R_0} \quad . \tag{1}$$

Чтобы оценить это выражение, однако, необходимо знать зависимость энергии E от радиуса R. С другой стороны, масштабное преобразование $r \to \lambda r$, примененное к одночастичной волновой функции основного состояния, приводит к так называемой "скейлинг - несжимаемости":

$$K_A = \frac{\partial^2(E/A)}{\partial \lambda^2}\bigg|_{\lambda=1} \quad . \tag{2}$$

Плотность кинетической энергии в окрестности точки r дается выражением

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \dot{R}^2 \quad , \tag{3}$$

если считать, что дыхательная мода сохраняет однородность системы. Тогда полная кинетическая энергия системы с плотностью распределения частиц

$$\rho(r) = \frac{3A}{4\pi R^3} \cdot \theta(R-r) \quad , \tag{4}$$

содержащей A частиц, равна

$$T = \int \rho(r) T(r) d^3r = \frac{1}{2}\dot{R}^2 \cdot \frac{3}{5} m_N A \quad . \tag{5}$$

Последнее уравнение соответствует эффективной массе

$$m_{eff} = \frac{3}{5} m_N A \quad . \tag{6}$$

Здесь m_N - масса нуклона. Именно величина (6) при $A = 1$ была принята как приближение к эффективной массе нуклонной дыхательной моды в [2].

Для энергии монопольных вибраций имеем

$$\hbar\omega = \sqrt{\frac{K}{m_{eff}}} = \frac{1}{R_0}\sqrt{\frac{K_\infty}{\frac{3}{5}m_N}} = \frac{1}{r_0 A^{1/3}}\sqrt{\frac{K_\infty}{\frac{3}{5}m_N}} \quad , \tag{7}$$

что пропорционально $A^{-1/3}$. Следовательно, можно думать, что сжимаемость бесконечной однородной ядерной материи должна быть равна сжимаемости отдельного нуклона. Это видно из уравнения (7) при $r_0 \sim r_N$ и $A = 1$. Эти феноменологические рассуждения приводят к идее, что нуклонная дыхательная мода должна преобразовываться в ядерную дыхательную моду, или, другими словами, это события одной природы. Кажется, модель Скирма сейчас является единственной моделью, в которой эта идея может быть проверена.

3. Сжимаемость скирмионной материи

Модель Скирма представляет собой прстейшее обобщение нелинейной σ- модели, имеющее стабильные решения с ненулевым топологическим зарядом [6], интерпретируемым как барионный заряд [7]. Модель можно рассматривать как некоторую коллективную модель в терминологии, принятой в теоретической ядерной физике. Коллективные переменные в модели Скирма определяют классические конфигурации пионных полей.

SU(2) - модель Скирма задается плотностью лагранжиана [6]

$$\mathcal{L} = \frac{F_\pi^2}{16} \cdot Tr(L_\mu L_\mu) + \frac{1}{32e^2} \cdot Tr\left[L_\mu; L_\nu\right]^2 , \qquad (8)$$

где

$$L_\mu = U^+ \partial_\mu U , \qquad (9)$$

а

$$U(\vec{x}) = exp(i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}) \qquad (10)$$

- некоторая $SU(2)$ - матрица, параметризуемая изотриплетом $\vec{\pi}(\vec{x})$, а $\vec{\tau}$ - матрицы Паули. F_π в ур.(8) - постоянная пионного распада, ее эмпирическое значение 186,4 МэВ. Постоянная e - феноменологический параметр модели.

В [8] было показано, что квантовые солитоны этой модели можно интерпретировать как физические нуклоны или другие тяжелые объекты, какими являются атомные ядра.

Конкретные расчеты в модели Скирма начинаются с решения уравнений для стационарных конфигураций, вытекающих из (8). Так как аналитическое решение системы уравнений Эйлера - Лагранжа до сих пор не получено, обычно прибегают к некоторому предположению (анзац) о форме солитона. В данной работе будет использоваться новая вариационная форма решения, задаваемая следующим вектором [9]

$$\vec{N} = \{cos\Phi(\phi,\theta)sinT(\theta),\ sin\Phi(\phi,\theta)sinT(\theta),\ cosT(\theta)\}\ . \tag{11}$$

В уравнении (11) $\Phi(\phi)$, $T(\theta)$ - некоторые произвольные функции направляющих углов (θ,ϕ) вектора $\vec{r}$ в сферической системе координат. Вектор $\vec{N}$ определяет решения U:

$$U(\vec{r}) = cosF(r) + i(\vec{r}\cdot\vec{N})\ sinF(r)\ . \tag{12}$$

Было показано [9],что уравнение (11) представляет собой обобщение конфигурации "еж" [8] и "$k\phi$ –" конфигурации [10] и приводит к серии новых решений в барионном и топологически тривиальном секторах. Некоторые из этих новых состояний классически стабильны.

После некоторой утомительной алгебры лагранжева плотность $\mathcal{L}$ может быть представлена следующим образом:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4\ , \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2 &= -\frac{F_\pi^2}{8}\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left[\left(\frac{sinT}{sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\right)^2 + \right.\right.\\ &+ \left.\left.\left(\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)^2 + sin^2T\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)^2\right]\frac{sin^2F}{r^2}\right\}\end{aligned} \tag{14}$$

и

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_4 = -\frac{1}{2e^2}\cdot\frac{sin^2F}{r^2}\cdot&\left\{\frac{sin^2T}{sin^2\theta}\left(\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)^2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\right)^2\cdot\frac{sin^2F}{r^2} + \right.\\ &+ \left.\left[\frac{sin^2T}{sin^2\theta}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)^2 + sin^2T\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)^2\right]\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2\right\}\ .\end{aligned} \tag{15}$$

Вариация функционала $L = \int\mathcal{L}d\vec{r}$ по Φ приводит к уравнению, которое имеет решение вида

$$\Phi(\phi) = k(\theta)\cdot\phi + Const \tag{16}$$

со связью:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}[sin^2T(\theta)\cdot sin\theta\cdot\frac{\partial k(\theta)}{\partial\theta}]=0. \qquad (17)$$

Здесь функция $k(\theta)$ - кусочно - постоянная функция (ступенчатая функция) в общем случае. Более того,число $k(\theta)$ должно быть целым в произвольной области $\theta_m \le \theta \le \theta_{m+1}$, где θ_m, θ_{m+1} - последовательные точки разрывов. Положение этих точек определяется условием

$$T(\theta_m)=m\cdot\pi \quad , \qquad (18)$$

с целым m, как следует из уравнения (17).

Теперь мы имеем следующее выражение для массы солитона

$$M=\gamma\cdot[a\cdot A+b\cdot B+C] \quad , \qquad (19)$$

где $\gamma=\pi\cdot F_\pi/e$ и $x=F_\pi\cdot e\cdot r$, а a,b и A,B,C - следующие интегралы:

$$a=\int\limits_0^\pi\Big[k^2\frac{sin^2T}{sin^2\theta}+(T')^2\Big]sin\theta d\theta,\quad b=k^2\int\limits_0^\pi\frac{sin^2T}{sin^2\theta}(T')^2 sin\theta d\theta \ ,(20)$$

$$A=\int\limits_0^\infty sin^2F\Big[\frac{1}{4}+(F')^2\Big]dx\ ,\quad B=\int\limits_0^\infty\frac{sin^4F}{x^2}dx\ ,$$

$$C=\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty(F'x)^2dx\ . \qquad (21)$$

Здесь мы используем символ штрих для обозначения производной по своему аргументу:

$$T'=\frac{\partial T}{\partial\theta}\quad;\quad F'=\frac{\partial F}{\partial r}\quad . \qquad (22)$$

Мы рассматриваем конфигурации с конечной массой. Для таких конфигураций $F(0)=n\cdot\pi$,где n - некоторое целое число. Без потери общности мы выбираем $F(\infty)=0$. Как было показано в [11], $T(\theta)$ имеет следующее поведение в окрестности границ области определения:

$$T(\theta)\to\theta^k,\ for\ \theta\to 0;\ T(\theta)\to\pi\cdot l-(\pi-\theta)^k,\ for\ \theta\to\pi\ .(23)$$

Здесь l - целое число. Таким образом, мы имеем следующую оценку для числа d точек разрыва:

$$0 \leq d \leq l - 1 \quad . \tag{24}$$

Теперь все решения $U_{nl\{k(d)\}}$ классифицируются набором целых чисел n, l and $k_0, ..., k_{l-1}$. Функции $F(x)$ и $T(\theta)$ должны удовлетворять уравнениям (14,15) из [11] в произвольной области пространства с данным k_i.

В таблице 1 представлены наименьшие массы скирмионов с $1 \leq B \leq 12$. Из табл.1 можно увидеть почти линейную зависимость классической массы от барионного заряда. Такая зависимость сильно отличается от зависимости $M \sim B(B+1)$, которую можно получить для анзаца "еж" [12].

Таблица 1. Нижайшие массы солитонов для топологических секторов с $B \leq 12$

B	1	2	3	4	5
M	11.605	22.458	34.585	45.536	56.118
B	6	8	9	10	12
M	66.701	89.310	103.08	113.12	134.45

Можно ввести скейлинг-преобразование [5], [13]

$$U(\vec{r}) \to U\left(\vec{r}e^{\lambda(t)}\right) \tag{25}$$

для поля U в лагранжиане Скирма. Это преобразование не меняет барионный заряд, но отвечает изменению размера системы. Теперь лагранжиан принимает форму

$$L = \frac{1}{2}\dot{\lambda}^2 e^{-3\lambda} Q_2 + \frac{1}{2}\dot{\lambda}^2 e^{-\lambda} Q_4 - M_2 e^{-\lambda} - M_4 e^{\lambda} \ . \tag{26}$$

Для инерциальных величин Q_2 и Q_4 имеем [11] :

$$Q_2 = \frac{\pi}{F_\pi e^3} \int_0^\infty (F')^2 x^4 dx \quad , \tag{27}$$

$$Q_4 = \frac{2\pi}{F_\pi e^3} \int_0^\infty (F')^2 sin^2 F x^2 dx \int_0^\pi \left[k^2 \frac{sin^2 T}{sin^2\theta} + (T')^2\right] sin\theta d\theta \quad , \tag{28}$$

и

$$M_2 = -\int \mathcal{L}_2 d\vec{x} \quad , \quad M_4 = -\int \mathcal{L}_4 d\vec{x} \ . \tag{29}$$

После канонического преобразования и процедуры квантования получаем квантовый гамильтониан

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}_\lambda^2}{2(Q_2+Q_4)} + \frac{1}{2}\lambda^2 (M_2 + M_4) + M_2 + M_4 \ . \tag{30}$$

Определение (2) несжимаемости K солитона дает

$$K = M_2 + M_4 = M \quad , \tag{31}$$

что равно массе солитона.

Частоты $\hbar\omega$ дыхательной моды в легких системах с барионным зарядом B даны в табл.2 [14] (в единицах $F_\pi e$).

Таблица 2. Частоты $\hbar\omega$ дыхательной моды в легких системах

B	1	2	3	4	6	8	9	12
$\hbar\omega$	0.31	0.27	0.24	0.23	0.20	0.18	0.17	0.15

Как следствие линейной зависимости массы классических солитонов от барионного заряда B мы можем легко определить несжимаемость солитона

$$K = M \simeq M' \cdot B \ . \tag{32}$$

Из наших расчетов мы имеем $M' \simeq M\Big|_{B=1}$. Для ядерной несжимаемости, следуя определению (2), получаем

$$K_A = \frac{K}{B} = M' \simeq M\Big|_{B=1} = K\Big|_{B=1} \ . \tag{33}$$

Расчет дает для K_A величину порядка 800 МэВ. Это находится в согласии с идеей, что ядерная несжимаемость порядка нуклонной, которая, в свою очередь, порядка нуклонной массы.

4. Обсуждение результатов

Из нашего рассмотрения следует, что нуклонная дыхательная мода преобразуется в ядерную дыхательную моду. Другими словами, эти два явления имеют одну и ту же природу. Кажется, модель Скирма пока единственная модель, в которой реализуется эта идея. Хотя полученные частоты следуют зависимости $\hbar\omega \sim B^{-1/3}$, они лежат существенно выше, чем энергии гигантских монопольных резонансов, рассчитанных в традиционных подходах. Например, в методе гиперсферических функций [15] энергии ГМР лежат в районе от 20 до 35 МэВ для массовых чисел $4 \leq A \leq 16$.

В принципе в тяжелых ядрах должны существовать две 0^+ вибрационные моды, т.к. по крайней мере два размерных параметра имеют отношение к данной задаче. Речь идет о радиусе ядра R и параметре диффузности b. Различны сжимаемости и, соответственно, частоты, отвечающие изменениям R и b во времени. Эти две моды, конечно, не ортогональны друг другу, но это не важно для нашего обсуждения.

В легких ядрах можно было бы также ожидать наличия жесткой и мягкой дыхательных мод. Однако именно в легких ядрах один из размерных параметров, на первый взгляд, теряет смысл. Но именно в легких ядрах неточечность нуклонов становится важным обстоятельством. Мы опять имеем два размерных параметра - радиус ядра и размер нуклона, которые становятся сравнимыми в этой области массовых чисел.

Метод гиперсферических функций и другие описывают, на наш взгляд, вибрации положений точечных нуклонов и охватывают, таким образом, только мягкую моду. Скейлинг-преобразование в модели Скирма изменяет не только положение нуклонов, но и их размер. Таким образом, модель Скирма описывает лежащую выше более жесткую моду, которая может быть проявлением нуклонного размера в легких ядрах.

Некоторые указания на существование узких 0^+ резонансов в легких ядрах в области энергий около 45 МэВ получены в экспериментах по рассеянию нейтронов и дейтронов на ядрах гелия [16], [17].

Литература

[1] A.N.Antonov, L.P.Kaptari, V.A.Nikolaev, A.Yu.Umnikov, JINR Rapid Communications N2[41]-90, Dubna (1990) p.14.

[2] G.E.Brown, I.W.Durso, M.B.Johnson, Nucl. Phys. **A397** (1983) 447.

[3] J.J.Griffin, J.A.Wheeler, Phys. Rev. **108** (1957) 311.

[4] P.A.M.Dirac, Proc. Roy. Soc. **268** (1962) 57.

[5] L.C.Biedenharn, Y.Dothan, M.Tarlini, Phys.Rev. **D31** (1985) 649.

[6] T.H.R.Skyrme, Nucl. Phys. **31** (1962) 556.

[7] E.Witten, Nucl. Phys. **B223** (1983) 422.

[8] G.S.Adkins, C.R.Nappi and E.Witten, Nucl. Phys. **B228** (1983) 552.

[9] V.A.Nikolaev, O.G.Tkachev, JINR Rapid Communications N4[43]-90, Dubna (1989) 39.

[10] H.Weigel, B.Schwesinger, G.Holzwarth, Phys. Lett. **B168** (1986) 556.

[11] V.A.Nikolaev, O.G.Tkachev, JINR Preprint E4-89-848, Dubna (1989).

[12] Е.Б.Богомольный, В.А.Фатеев, ЯФ. **37** (1983) 228.

[13] В.А.Николаев, Э.Рока, Краткие сообщения ОИЯИ **14-86** (1986) 28.

[14] R.M.Nikolaeva, V.A.Nikolaev, K.V.Shitikova, O.G.Tkachev, JINR Preprint E4-90-375, Dubna (1990).

[15] К.В.Шитикова, ЭЧАЯ **16** (1985) 825.

[16] Г.Ф.Филиппов, В.С.Василевский, М.Бруно, Ф.Канната, М.Д'Агостино, Ф.Ортолани, ЯФ. **51** (1990) 1551.

[17] W.Busse, B.Efken, D.Hilscher, H.Morgenstern, J.A.Scheer Nucl.Phys. **A187** (1972) 21.

Рукопись поступила 5 марта 1991 года.